

ров. – М.: Наука, 1984. – 832 с. 9. Идин М.А., Шериков В.В. Решение задачи движения газа в трубе методом малого параметра // Пневматика и гидравлика: Приводы и системы управления. – 1984. – Вып. 10. – С. 249-263. 10. Якунин А.В., Ратаушкин В.А. Упрощенная модель теплового режима управляемого потока газа в магистральном трубопроводе подземной прокладки // Вестник НТУ «ХПИ». Сер. Динамика и прочность машин. – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2002. – Вып. 10, т. 2. – С. 132-138.

*Поступила в редакцию 18.03.04*

УДК 539.3

**Е.Г.ЯНЮТИН**, докт.техн.наук, НТУ «ХПИ»;  
**А.С.ШАПАТА**, ХНАДУ

## **ОБРАТНАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ**

Представлено стійке до похибок чисельно-аналітичне рішення некоректної оберненої задачі з ідентифікації закону зміни за часом нестационарного імпульсного навантаження, яке діє на круглу циліндричну оболонку скінченної довжини. Осесиметричний рух шарнірно-опертої оболонки в межах пружності моделюється на підґрунті уточненої теорії С.П.Тимошенка.

Numerically analytical solution of the ill-posed inverse problem in identification of the changing in time regularity of non-stationary impulsive loading steady to errors which affects the round cylindrical shell of a finite length is given. Axisymmetric movement of a joint-supported shell in the limits of elasticity is modelled grounded on S.P.Timoshenko's specified theory.

### **Постановка проблемы**

В настоящее время интенсивно развивается исследование напряженно-деформированного состояния (НДС) тел, находящихся под действием импульсных нагрузок. Важное место в исследованиях параметров НДС ответственных элементов конструкций и сооружений занимает решение проблем, связанных с определением действующего импульсного нагружения, а также с управлением их деформированием.

### **Анализ исследований и публикаций**

Укажем некоторые публикации, непосредственно относящиеся к вопросу освещаемому в настоящей статье. В [1,3] рассмотрены построение математических моделей и методов исследования НДС (прямые задачи) при деформировании элементов конструкций цилиндрической формы. Авторы монографии [2] рассмотрели некоторые конкретные прямые и обратные задачи для цилиндрических тел. Несмотря на важное практическое приложение обратных задач по идентификации нестационарных нагрузок, они разработаны недостаточно. Остаются не изученными вопросы определения закона изменения импульсного нагружения на цилиндрическую оболочку при ее осесимметричном деформировании.

## Постановка задачи

Рассмотрим упругую деформацию круглой цилиндрической оболочки с толщиной  $h$  и длиной  $l$ . Оболочка закреплена на торцах шарнирно с проскальзыванием, как показано на рис. 1. Реакция оболочки на осесимметричную нагрузку  $q$  моделируется системой линейных дифференциальных уравнений согласно теории С.П. Тимошенко [1,3]:

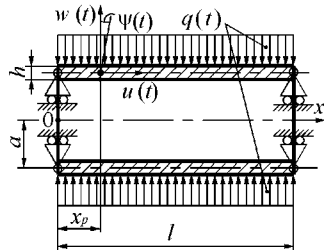


Рисунок 1

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\nu l}{a} \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0;$$

$$k^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + l \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{a} \left( \frac{l^2}{a} w + \nu l \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = \frac{(1-\nu^2)^2}{Eh} q(\xi, \tau); \quad (1)$$

$$\frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \bar{k}^2 \left( l \frac{\partial w}{\partial \xi} + \psi l^2 \right) - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} = 0;$$

где  $\xi = x/l$ ;  $\tau = t\sqrt{E}/(\sqrt{l\rho(1-\nu^2)})$ ;  $\bar{k}^2 = 0,5(1-\nu)k^2$ ;  $t$  – размерное время;  $u, w$  –

перемещения точек срединной поверхности оболочки соответственно в осевом и нормальном направлениях по отношению к срединной поверхности;  $\psi$  – угол поворота нормали к срединной поверхности оболочки;  $\nu, E$  – упругие постоянные материала оболочки;  $\rho$  – плотность материала оболочки;  $k$  – коэффициент сдвига;  $a$  – радиус кривизны срединной поверхности оболочки;  $x$  – координата в осевом направлении;  $q(x, t)$  – заданная внешняя импульсная нагрузка.

Для определения компонентов обобщенного перемещения  $(w, u, \psi)$  используем следующие разложения искомых функций [1]:

$$w(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\tau) \sin(k\pi\xi); \quad u(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(\tau) \cos(k\pi\xi); \quad \psi(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\tau) \cos(k\pi\xi), \quad (2)$$

где  $a_k(t)$ ,  $b_k(t)$  и  $c_k(t)$  – неизвестные коэффициенты разложений.

Разложения (2) обеспечивают следующие граничные условия для шарнирного опирания оболочки

$$N_x(\xi, t)|_{\xi=0, \xi=1} = 0, \quad w(\xi, t)|_{\xi=0, \xi=1} = 0, \quad M_x(\xi, t)|_{\xi=0, \xi=1} = 0, \quad (3)$$

Подставив ряды (2) в уравнения (1) с учетом свойств ортогональности произведения функций косинусов и синусов получим искомые коэффициенты разложений

$$a_k(\tau) = \sum_{r=1}^3 \Lambda_{kr} I_{kr}(\tau); \quad b_k(\tau) = \sum_{r=1}^3 \Phi_{kr} I_{kr}(\tau); \quad c_k(\tau) = \sum_{r=1}^3 \Omega_{kr} I_{kr}(\tau), \quad (4)$$

где

$$I_{kr}(\tau) = \int_0^{\tau} P_k(x_1) \sin \alpha_{kr}(\tau - x_1) dx_1, \quad \Lambda_{kr} = - \frac{(B_k - \alpha_{kr}^2)(C_k - \alpha_{kr}^2)}{\alpha_{kr} \prod_{j=1, j \neq r}^3 (\alpha_{kj}^2 - \alpha_{kr}^2)}, \quad (5)$$

$$A_n = \bar{k}^2 n^2 \pi^2 + l^2 \alpha^{-2}; \quad B_n = n^2 \pi^2; \quad C_n = n^2 \pi^2 + 12 \bar{k}^2 l^2 h^{-2}.$$

$$\Phi_{kr} = - \frac{\nu / k \pi (C_k - \alpha_{kr}^2)}{\alpha_{kr} \prod_{j=1, j \neq r}^3 (\alpha_{kj}^2 - \alpha_{kr}^2)}, \quad \Omega_{kr} = \frac{12 k^{-2} l (B_k - \alpha_{kr}^2)}{h^2 \alpha_{kr} \prod_{j=1, j \neq r}^3 (\alpha_{kj}^2 - \alpha_{kr}^2)},$$

$$P_k(\tau) = 2(1 - \nu^2)^2 (Eh)^{-1} Q_k(\xi, \tau), \quad Q_k(\xi, \tau) = \int_0^1 q(\xi, \tau) \sin(n\pi\xi) d\xi. \quad (6)$$

Форма решения в виде соотношений (4) может быть получена, например, с помощью операционного исчисления. Заметим, что (4) обеспечивает выполнение нулевых начальных условий при деформировании оболочки.

Так как прямая и обратная задачи имеют непосредственную связь, то приведенное решение будем использовать для построения задачи идентификации. Целью работы является построение решения обратной задачи, устойчивого к погрешностям в исходных данных, для определения закона изменения во времени действующей на оболочку импульсной нагрузки  $q(\xi, \tau)$  при известном ее геометрическом распределении по поверхности оболочки, а также при известном законе изменения во времени прогиба в одной из точек оболочки.

### Решение задачи идентификации

Решение обратной задачи получим для случая нагружения оболочки, равномерно распределенной нагрузкой  $q(\tau) = R_0(\tau)$ , как показано на рис. 1. Выражения (5) и (6) для  $P_k(\tau)$  и  $I_{kr}(\tau)$  примут следующий вид

$$P_k(\tau) = \frac{2(1 - \nu^2)^2}{Eh} \Phi_k^g R_0(\tau), \quad I_{kr}(\tau) = \frac{2(1 - \nu^2)^2}{Eh} \Phi_k^g \int_0^\tau R_0(\tau) \sin(\alpha_{kr}(\tau - x_1)) dx_1,$$

где  $\Phi_k^g = \frac{1}{k\pi} (1 - \cos(k\pi))$ .

Формула (2) для прогиба в точке  $\xi_p$  будет такой

$$w(\xi_p, \tau) = \frac{2(1 - \nu^2)^2}{Eh} \sum_{k=1}^N \Phi_k^g \sum_{r=1}^3 \Lambda_{kr} \int_0^\tau R_0(\tau) \sin(\alpha_{kr}(\tau - x_1)) dx_1. \quad (7)$$

Если функция  $w$  задана в некоторой точке  $\xi_p$ , а  $R_0(\tau)$  неизвестна, то (7) является интегральным уравнением Вольтерра 1-го рода для  $R_0(\tau)$ . Аппроксимируя искомую функцию в (7) конечно-постоянной функцией времени, получим выражение

$$w_m^* = \frac{2(1 - \nu^2)^2}{Eh} \sum_{k=1}^N \Phi_k^g \sum_{r=1}^3 \Lambda_{kr} \sum_{p=1}^m R_{0p} \gamma(k, r, m, p), \quad (8)$$

где  $w^*$  – прогиб в точке, содержащий, например, уже погрешности случайного характера;  $m = 0, 1, \dots, M$ ;  $M$  – число интервалов по времени;  $M = \tau_{im}/\Delta\tau$ ,  $\tau_{im}$  – время исследования;  $\gamma(k, r, m, p) = \alpha_{kr}^{-1} \{ \cos(\alpha_{kr}(m-p)\Delta\tau) - \cos(\alpha_{kr}(m-p+1)\Delta\tau) \}$ . Выражение (8) можно представить в виде системы линейных алгебраических уравнений  $\mathbf{AR} = \mathbf{w}$ , где  $\mathbf{A}$  – матрица коэффициентов уравнений системы,

$$A_{mp} = 2(1 - \nu^2)^2 (Eh)^{-1} \sum_{k=1}^N \Phi_k^g \sum_{r=1}^3 \Lambda_{kr} \gamma(k, r, m, p),$$

$\mathbf{R}$  – искомый вектор значений нагрузки во времени,  $\mathbf{w}_m = \mathbf{w}^*(\xi_p, m\Delta\tau)$ .

Применение к указанной системе регуляризирующего оператора, построение которого подробно описано в [2], дает возможность получить устойчивое решение обратной задачи.

Для конкретных расчетов приняты следующие параметры оболочки:  $l = 1,5 \text{ м}$ ,  $a = 0,3 \text{ м}$ ,  $h = 0,03 \text{ м}$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ ,  $k = 0,83$ ,  $N = 50$ . Результаты идентификации, представленные на рис. 3, получены при использовании в качестве исходных данных функции прогиба, изображенного на рис. 2 кривая 1. Заметим, что эта кривая задана произвольным образом и соответствует непрерывной функции с непрерывной первой производной, причем еще дополнительным ограничением является условие  $w(\xi_p, 0) = 0$ . На рис. 3 кривые нагрузок получены с разными параметрами регуляризации. Кривые 2, 3 и 4 на рис. 2 – это кривые прогиба, отвечающие воздействию идентифицированных нагрузок 2, 3 и 4 на рис. 3 соответственно.

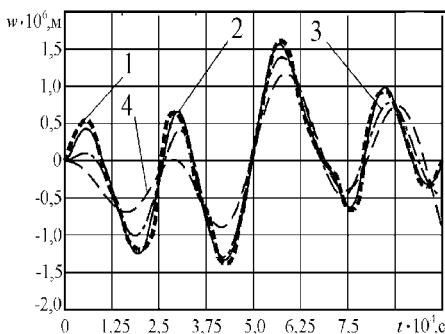


Рисунок 2

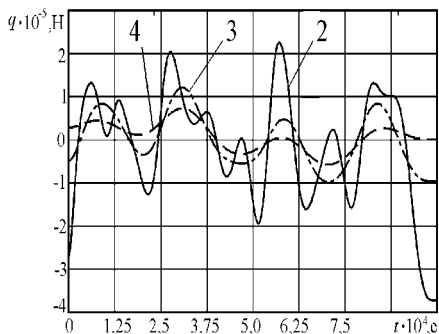


Рисунок 3

## Выводы

Приведенные результаты идентификации демонстрируют эффективность предложенного способа решения некорректной обратной задачи при задании в качестве исходных данных прогиба как произвольной функции времени, даже без полного учета начальных условий и волнового характера деформирования оболочки.

**Список литературы.** 1. Янютин Е. Г. Импульсное деформирование упругих элементов конструкций. – Киев: Наук. думка, 1993. – 146 с. 2. Янютин Е. Г., Ялчевский И. В. Импульсные воздействия на упругодеформируемые элементы конструкций. – Харьков: Изд-во ХГАДТУ (ХАДИ), 2001. – 184 с. 3. Cooper R.M., Naghdi P.M. Propagation on nonaxially symmetric waves in elastic cylindrical shells// J. Acoust. Soc. Amer. -1957.-V. 29, № 12. – P. 1365-1373.

Поступила в редколлегию 7.04.04